

На правах рукописи

Финкельштейн Евгения Александровна

**Вычислительные технологии аппроксимации множества достижимости
управляемой системы**

Специальность 05.13.01 – системный анализ, управление и обработка
информации (космические и информационные технологии)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Иркутск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН), г. Иркутск.

Научный руководитель: доктор технических наук
Горнов Александр Юрьевич

Официальные
Оппоненты: **Антипин Анатолий Сергеевич**
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
г. Москва
главный научный сотрудник

Рыжиков Иван Сергеевич
кандидат технических наук,
Открытое акционерное общество «Красноярский завод цветных металлов имени В.Н. Гулидова»,
г. Красноярск
специалист по моделированию

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург

Защита состоится 14 сентября 2018 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.249.05, созданного на базе Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева по адресу: 660037 г. Красноярск, проспект имени газеты «Красноярский рабочий», 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева и на сайте <https://www.sibsau.ru>.

Автореферат разослан «__» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент

Панфилов
Илья Александрович

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена созданию алгоритмов аппроксимации множеств достижимости нелинейных динамических систем, реализации вычислительных технологий, методикам их тестирования, в том числе созданию тестовой коллекции невыпуклых множеств достижимости и исследованию прикладных моделей.

Актуальность диссертационной работы основывается, *во-первых*, на значимости объекта исследования, поскольку множество достижимости (МД) является одним из классических объектов исследования в теории оптимального управления. Возможность конструктивного оперирования с множеством достижимости управляемой системы существенно упрощает решение целого ряда традиционных экстремальных задач – поиска локального и глобального экстремума функционала, параметрической идентификации системы, синтеза оптимального управления, фазового оценивания состояния системы, нормирования воздействий, управления пучками траекторий и других. Появление эффективных алгоритмов фазового оценивания может привести к достижению качественно нового уровня возможностей численного исследования динамических систем.

Разработкой численных методов для задач фазового оценивания в течение многих лет занимаются научные коллективы в России: ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург), ВЦ РАН (г. Москва), МИАН (г. Москва), МГУ (г. Москва), ИПМех РАН (г. Москва), МАИ (г. Москва), ИВМ СО РАН (г. Красноярск), ИДСТУ СО РАН (г. Иркутск) и специалисты за рубежом: A. Bressan, R.W. Brockett, A. Cellina, Z. Denkowski, A.L. Dontchev, H. Frankowska, G. Hackl, W.W. Hager, O. Hajek, A. Kastner-Maresch, A.J. Krener, F. Lempio, K.A. Loparo, A. Orneals, B. Piccoli, S. Raczynski, H. Schattler, I. Valyi, V.M. Veliov, W. Wendt, R. Winter, P. Wolenski и другие. Среди многочисленных работ по созданию алгоритмов аппроксимации для линейных управляемых систем нельзя не упомянуть труды группы профессора А.В. Лотова (г. Москва), сумевшей разработать методы оценивания для систем высокой размерности и решить с использованием реализованного инструментария ряд прикладных задач, в том числе нелинейных. В классических работах Ф.Л. Черноусько и его последователей созданы методы аппроксимации (как внутренней, так и внешней) нелинейных систем, основанные на эллипсоидных конструкциях. Уральской школой (А.Б. Куржанским, В.Н. Ушаковым, А.Г. Ченцовым, Т.Ф. Филипповой, Е.К. Костоусовой, В.С. Пацко и другими) глубоко изучены теоретические вопросы развития методологии фазового оценивания и реализованы алгоритмы, основанные на эллипсоидных и пиксельных методах и методах политопов. В.И. Гурманом, Г.Н. Константиновым, В.Г. Сидоренко, В.А. Дыхтой, В.А. Батуриным задачи описания и оценки МД рассматриваются с позиций принципа расширения и развитых на его основе методов оптимального управления. Перспективным подходом являются, предложенные А.И. Панасюком и В.И. Панасюком алгоритмы, основанные на уравнении границы интегральной воронки. Среди иностранных работ следует отметить исследования S. Raczynski, предложившего простой и эффективный метод аппроксимации границы множества достижимости на плоскости; исследования

группы болгарских математиков (А.Л. Dontchev, V.M. Veliov и др.), посвященные методам эйлера типа, а также многочисленные попытки создания алгоритмов на основе численного решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Второй фактор, обуславливающий актуальность работы, следует из нелинейности рассматриваемых динамических систем, для которых проблема численного оценивания МД к настоящему времени не может считаться решенной. Факторами, осложняющими процесс разработки алгоритмов аппроксимации МД в нелинейном случае, являются: рост сложности геометрии МД с увеличением интервала времени; плохая обусловленность возникающих вычислительных задач; многоэкстремальность вспомогательных задач оптимизации; вычислительная неустойчивость.

Третьим фактором, определяющим актуальность темы диссертационной работы, является необходимость и объективная трудность сравнения разных подходов к решению задач рассматриваемого типа. Эффективность алгоритмов построения численных аппроксимаций МД, как и других численных методов, наиболее корректно может быть оценена с помощью тестирования на основании коллекции тестовых задач. Широко известны тестовые коллекции задач оптимизации, авторами которых являются J.T. Betts, A.R. Colville, R.S. Dembo, C. Floudas, D.M. Himmelblau, W. Hock, A. Miele, J.J. More, P. Pardalos, K. Schittkowski и другие. Однако в настоящее время не существует общепризнанных коллекций как в области исследования МД, так и в области оптимизации динамических систем. В диссертационной работе представлены методики сравнения алгоритмов построения МД и соответствующих программных средств, основанные на разработанной тестовой коллекции невыпуклых задач.

Основной целью диссертации является совершенствование существующих и создание качественно новых методов и вычислительных технологий аппроксимации множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Под вычислительной технологией здесь и далее понимается совокупность алгоритмов и методов, структур данных, расчетных методик и программных реализаций математической модели.

Задачи, решенные для достижения поставленной цели:

1. Разработка новых алгоритмов для получения различного типа аппроксимаций множеств достижимости нелинейных управляемых систем, позволяющих рассматривать задачи более широких, чем в известных методах, классов, а также превосходящих либо по скорости, либо по точности и степени надежности.
2. Разработка и тестирование многометодных вычислительных технологий аппроксимации множества достижимости, позволяющих добиться более высокой, чем при использовании одиночных известных алгоритмов, надежности за счет комбинирования методов и точной настройки параметров.
3. Разработка специализированного программного обеспечения, реализующего широкие возможности предлагаемой вычислительной технологии.
4. Формирование представительной коллекции невыпуклых тестовых множеств достижимости для оценки и сравнения различных вычислительных технологий.

5. Применение разработанных методов, алгоритмов и вычислительных технологий для решения практических задач из различных областей науки и техники.

Классы задач и методы исследования. Рассматриваются нелинейные динамические системы с параллелепипедными ограничениями на управления. Исследуемые подходы, в первую очередь, опираются на теорию и методы оптимального управления, алгоритмы глобальной оптимизации в динамических и статических задачах с ограничениями, методы теории аппроксимации.

Научная новизна проведенного исследования заключается в следующем:

1. Разработаны алгоритмы равномерного и квазиравномерного заполнения объема множества достижимости, позволяющие рассматривать задачи оценки множества достижимости произвольной размерности. В результате работы алгоритмов строится аппроксимативный набор точек, который, в отличие от других алгоритмов, при небольшом их количестве позволяет выявить все характерные особенности множества, рассчитать характеристики и визуализировать результаты.

2. Для двухмерных систем разработаны алгоритмы кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости, которые не имеют аналогов в общем случае. Алгоритм, основанный на принципе максимума Понтрягина, оказался конкурентоспособным благодаря предложенным дополнительным процедурам верификации. Алгоритм, вспомогательной задачей которого является максимизация площади, ограничиваемой аппроксимирующим контуром, применим и для задач построения множества достижимости в двумерном пространстве выходов многомерных систем.

3. Разработана технология аппроксимации множества достижимости объединением эллипсов. Критерием качества аппроксимации, в отличие от традиционного метода эллипсоидов, является минимум площади покрытия, а рассмотрение объединения, а не пересечения фигур, дает дополнительные возможности для описания сложных невыпуклых объектов.

4. Разработаны вычислительные технологии построения аппроксимаций многомерных множеств достижимости, реализованные в специализированном программном обеспечении OPTCON-MD. Широкие возможности настройки параметров алгоритмов и их комбинаций позволяют эффективно решать рассматриваемые задачи, в том числе для систем многих переменных с векторным управлением, входящим в правую часть системы нелинейно, и систем с разрывной правой частью.

5. Разработаны методики сравнения алгоритмов аппроксимации множества достижимости и создана тестовая коллекция невыпуклых тестовых множеств достижимости, отсутствующая в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и связанных задач оптимального управления.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы состоит в разработке новых алгоритмов аппроксимаций множеств достижимости нелинейных управляемых систем, позволяющих рассматривать задачи различных клас-

сов, в том числе многомерных. Реализация вычислительной технологии позволила выявить модификации алгоритмов, повышающие надежность получаемых решений.

Практическая значимость диссертационной работы обусловлена возможностью использования предложенных технологий для решения прикладных задач. Описаны подходы, основанные на алгоритмах аппроксимации множеств достижимости, к решению соответствующих классов задач теории управления: оптимального управления в задачах с терминальным линейным функционалом, быстрогодействия, нормирования управляющих воздействий. Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели (Dynamic Integrated Model of Climate and the Economy), описывающей влияние климатических факторов на промышленность и строительство; решена задача управления сферическим роботом с двумя и тремя роторными двигателями; определена область технологических параметров реакции окисления метана на поверхности никеля, приводящих к возникновению автоколебательных процессов.

Реализация результатов работы. Разработанные в ходе выполнения диссертационной работы алгоритмы успешно использовались при выполнении междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН №81 «Нелинейные явления в гетерогенных каталитических системах: пространственная и временная организация» и позволили без проведения натурного эксперимента оценить область технологических параметров реакции, приводящих к возникновению автоколебательных процессов.

Существенная часть диссертационного исследования была проведена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-31296 под руководством соискателя «Алгоритмы аппроксимации множества достижимости управляемых систем с разрывными правыми частями». Полученные в ходе выполнения работы, результаты были использованы в других проектах, поддержанных РФФИ, в частности, № 09-07-00267 «Вычислительные технологии интеллектуального анализа временных рядов на основе математических методов теории управления», № 12-07-00193 «Мультиметодные алгоритмы и вычислительные технологии идентификации динамических систем и параметрического синтеза оптимального управления».

На защиту выносятся:

1. Алгоритмы равномерного и квазиравномерного заполнения объема множества достижимости, которые показывают более высокую надежность в сравнении с известными алгоритмами, а также, в отличие от большинства предложенных в литературе методов, позволяют рассматривать нелинейные системы произвольной размерности.

2. Метод кусочно-линейной аппроксимации множества достижимости, основанный на максимизации площади и позволяющий строить аппроксимации проекций множества достижимости нелинейной системы на плоскости.

3. Двухстадийный метод аппроксимации множества достижимости объединением эллипсов, который, в отличие от традиционного метода эллипсоидов, дает расширенные возможности для оценивания сложных невыпуклых объектов.

4. Метод аппроксимации границы множества достижимости, основанный на принципе максимума Понтрягина, и в отличие от предложенного S. Raczynski устраняет, связанные с нелинейностью системы, трудности.

5. Вычислительные технологии построения аппроксимаций множеств достижимости, построенные на основе предложенных алгоритмов.

6. Коллекция невыпуклых тестовых множеств достижимости, отсутствующая в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и для связанных задач оптимального управления.

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена сериями вычислительных экспериментов и большим числом тестовых расчетов, проведенных с использованием разработанных методик сравнения, сопоставлением результатов вычислений с работами известных специалистов, апробацией на научных конференциях и экспертизой статей в ведущих научных журналах.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены диссертантом самостоятельно. Программные реализации разработанных алгоритмов и методик выполнены автором лично. Из совместных работ, опубликованных в соавторстве, в диссертации использованы результаты, полученные автором.

Апробация диссертационной работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международных конференциях: «Optimization and applications» (2013, 2014 гг.), Conference on Optimization, Simulation and Control (2013 г.), «Интеллектуализация обработки информации» (2012 г.), «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (2012, 2014, 2016 гг.), «Динамика систем и процессы управления» (2014 г.). Были представлены на всероссийских конференциях: «Методы оптимизации и их приложения» (2011 г.), «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (2012, 2013, 2016 гг.), «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (2011, 2013, 2014 гг.), Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию (2015–2017 гг.), Традиционной всероссийской молодежной летней школе «Управление, информация и оптимизация» (2014 г.), «Модели и методы исследования гетерогенных систем» (2012 г.), Конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (2010, 2012, 2017 гг.), «Ляпуновских чтениях» (2010–2017 гг.). Результаты работы обсуждались на семинарах в Институте проблем управления РАН (рук. Поляк Б.Т.), г. Москва; Институте космических и информационных технологий СФУ (рук. Царев С.П.), г. Красноярск; Институте вычислительного моделирования СО РАН (рук. Ноженкова Л.Ф.), г. Красноярск; Институте математики им. Соболева СО РАН (рук. Демиденко Г.В.), г. Новосибирск; Институте вычислительных технологий СО РАН (рук. Шокин Ю.И.), г. Новосибирск.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы из 140 наименований. Общий объем работы составляет 150 страниц, в тексте содержится 5 таблиц и 26 рисунков.

Публикации. Материалы, отражающие содержание диссертации, и результаты, выносимые на защиту, опубликованы более чем в 35 печатных работах, в т. ч. в 6 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, 4 из которых входят в международную систему цитирования Web of Science.

Содержание диссертационной работы по главам

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, формулируются цели и задачи исследования, характеризуются научная новизна и практическая значимость, излагаются основные результаты работы.

В **первой главе** приводится обзор работ по методам и алгоритмам исследования множеств достижимости и вычислительным технологиям поиска минимума функционала в задачах оптимизации управляемых систем. Описываются постановки рассматриваемых задач аппроксимации множества достижимости и оптимального управления с параллелепипедными ограничениями на управление.

На отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ рассматривается управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

$$u \in U := \{u: \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i, i = \overline{1, r}\}, \quad (2)$$

с заданными начальными значениями

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

t — независимая переменная (время). Функция f (нелинейная по всем своим аргументам) непрерывно дифференцируема по (x, u) и кусочно-непрерывна по t .

Множеством достижимости системы (1) к моменту времени t_1 называется множество $D = D(t_1, x^0)$ всех возможных значений вектора $x(t_1) = (x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))$, которые принимаются на решениях этой системы при выполнении ограничений (2) и начальных условиях (3).

Одна из задач диссертационного исследования состоит в разработке эффективных *вычислительных технологий аппроксимации множества достижимости* управляемой динамической системы (1) – (3). Задача аппроксимации множества достижимости системы понимается в терминах условной функции расстояния между множествами: построить некоторое описание множества \tilde{D}_K такое, что

$$d(\tilde{D}_K, D) \leq \varepsilon,$$

где K из множества допустимых управлений, а $d(\cdot, \cdot)$ – заданная метрика (или псевдометрика) на фиксированном классе $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ множеств, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ означает множество всех непустых подмножеств \mathbb{R}^n , $\varepsilon > 0$ – заданная точность приближения.

Вторая глава посвящена описанию и исследованию разработанных алгоритмов аппроксимации множеств достижимости. Предложенные алгоритмы могут быть условно поделены на внутренние, граничные и внешние. Внутренней аппроксимацией (либо «облачной», как состоящей из набора внутренних точек) называем аппроксимацию, которая гарантированно не включает в себя недости-

жимые при заданных ограничениях области или элементы фазового пространства. Внешняя аппроксимация гарантированно включает в себя всё МД. Граничной аппроксимацией МД в рамках данной работы называем кусочно-линейную аппроксимацию границы МД.

Метод стохастической аппроксимации (СА) используется в диссертации в качестве эталонного и является реализацией подхода Монте-Карло. Для эффективного использования метода СА была решена задача нахождения числа точек переключения релейного управления, позволяющего получить наилучшие аппроксимации.

Идея поиска внутренних «облачных» оценок получила развитие в алгоритмах равномерного (РЗ) и квазиравномерного заполнения (КРЗ), которые позволяют построить набор достижимых точек, в отличие от метода стохастической аппроксимации, равномерно с некоторой точностью аппроксимирующих множество уже при небольшом количестве узлов. Предлагаемые для этого алгоритмы отчасти схожи с методом «глубоких ям»¹ и требуют итеративного решения вспомогательных задач оптимизации.

Приведем описание алгоритма квазиравномерной аппроксимации, основывающегося на минимизации непрерывной функции, зависящей от расстояния между точками $\rho_i = \|x^i - x[u](t_1)\|_2^2$, где $x[u]$ – решение (1) при управлении u .

Алгоритм квазиравномерной аппроксимации:

1. База элементов аппроксимации МД иницируется случайным вектором $B = \{x^1(t_1)\}$. Число элементов в базе $nb = 1$.
2. $x^* = \arg \min_{u \in U} \sum_{i=1}^{nb} S(\rho_i)$, $x^i \in B$.
3. Если $\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{nb} S(\rho_i) = 0$, то $B = B \cup x^*$, $nb = nb + 1$, переход на шаг 2.
4. Иначе работа алгоритма завершена.

Минимизируемая функция $S(\rho)$, зависящая от расстояния между точками, определяется так, чтобы быть равной нулю, если ρ больше желаемого порогового значения d , равной достаточно большому числу M при $\rho = 0$, и монотонно убывать в промежутке $[0, d]$. При численных расчетах использовались кусочно-линейные, полиномиальные и экспоненциальные функции. Использование информации о нижней оценке оптимального значения функционала в задаче оптимального управления (ЗОУ), решаемой на шаге 2, позволяет существенно экономить вычислительное время при использовании рандомизированных алгоритмов глобальной оптимизации.

Пример 1. Рассмотрим на интервале времени $[0, 1.5]$ систему $\dot{x}_1 = x_1 + x_2 \sin x_2 + u$, $\dot{x}_2 = x_2 + u$, с начальными значениями $x(0) = (1, 1)$ и ограничениями $-1 \leq u \leq 2$. На рис. 1 в верхней строке представлен процесс пополнения базы точек равномерного алгоритма, а в нижней — квазиравномерного алгоритма на 20-й, 50-й и 100-й итерациях. Точками серого цвета отмечены аппроксимации

¹ Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 41:11 (2001), 1751–1760.

множества, полученные с помощью метода стохастической аппроксимации, черными ромбами — методом равномерной аппроксимации.

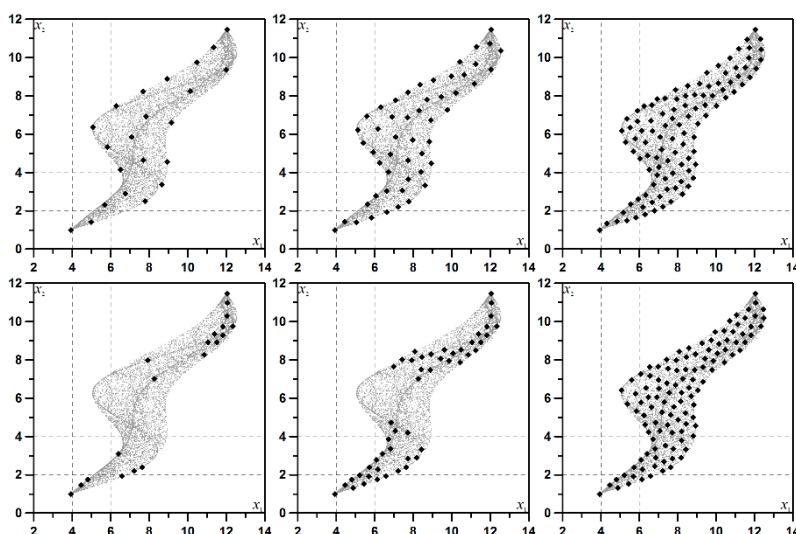


Рисунок 1 – Процесс пополнения базы точек алгоритма РЗ (сверху) и КРЗ (внизу) на 20-й, 50-й и 100-й итерациях

Полученные методом равномерной аппроксимации множества являются промежуточными результатами на каждой итерации; в некоторых случаях и грубой оценки, изображенной на левом верхнем рисунке, может быть достаточно. Конечный результат работы алгоритмов сопоставимы.

Для двумерного случая задача аппроксимации МД может быть сведена к задаче максимизации площади фигуры, ограничиваемой правильным кусочно-линейным контуром – замкнутой ломаной линией без самопересечений. Для её решения строится вспомогательная ЗОУ, которая включает набор из N повторяющихся подсистем с независимыми управлениями.

$$\dot{z}^j = f(z^j(t), v^j(t), t), z^j(t_0) = x^0, t \in [t_0, t_1], v^j(t) \in U, j = \overline{1, N},$$

каждая подсистема соответствует одной вершине аппроксимирующего контура. Размерность рассматриваемой общей системы равна nN . Для каждой подсистемы определен свой собственный набор управлений $v_i(t), i = 1, \dots, r$ с одинаковыми для всех подсистем ограничениями; размерность управлений общей системы rN .

В качестве максимизируемого функционала рассматривается «функционал площади»:

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^N (y_1^j(t_1) + y_1^{j-1}(t_1)) (y_2^j(t_1) - y_2^{j-1}(t_1)) \right\|.$$

Для достижения приемлемой аппроксимации необходимо дополнительно учитывать вспомогательные критерии, позволяющие избежать контуров с самопересечениями, контуров с неравномерными длинами звеньев, контуров с немонотонной нумерацией звеньев и др. Заметим, что на практике размерность аппроксимативной многоэкстремальной ЗОУ для сложных невыпуклых МД будет исчисляться десятками переменных.

В работе предложен способ построения аппроксимации МД двумерных систем, учитывающий тот факт, что граница МД – плоская кривая. Строится детерминированный алгоритм последовательного выбора начальных значений для сопряженной системы со окружности единичного радиуса. При этом, естественно

аппроксимирующие точки границы МД находятся последовательно (см. рис. 2). Обходя единичную сферу с постоянным шагом, в общем случае, не удастся получить равномерную аппроксимацию границы МД, что подтверждается численными расчетами. Для обеспечения свойства равномерности аппроксимации границы в алгоритм встроен механизм обратной связи.

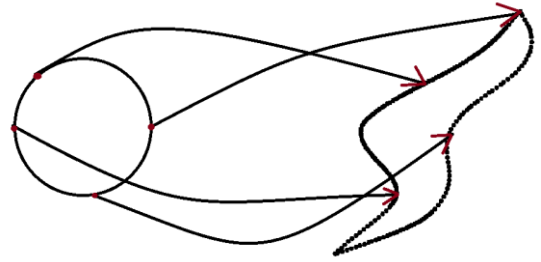


Рисунок 2 – Иллюстрация идеи алгоритма ПМ

Алгоритм равномерной монотонной аппроксимации границы (ПМ)

0. Задаются алгоритмические параметры: N_s – число шагов грубой оценки; K_L – коэффициент равномерности контура.
1. Грубо оценивается длина границы МД:
 - 1.1. начальный шаг движения по единичной сфере полагается $L_p = \frac{2\pi}{N_s}$;
 - 1.2. для $j = \overline{1, N_s}$:
 - 1.2.1. вычисляется значение угла поворота $\varphi_j = (j - 1)L_p$,
 - 1.2.2. начальные значения сопряженной системы полагаются $\psi_1(t_0) = \sin \varphi_j$, $\psi_2(t_0) = \cos \varphi_j$,
 - 1.2.3. с вычисленными $\psi_1(t_0)$, $\psi_2(t_0)$ интегрируется гамильтонова система

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}, t), x(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\psi(t) \cdot \partial f(x, \bar{u}, t)}{\partial x}, t \in [t_0, t_1],$$
 где $\bar{u} = \arg \max H(\psi, x, v, t), v \in U$,
 - 1.2.4. записываются конечные состояния $s_j^0 = x(t_1)$;
 - 1.3. вычисляется L – грубая оценка длины кривой $\{s_j^0\}, j = \overline{1, N_s}$.
2. Вычисляются допуски и погрешности: $\delta_l = LL_p$, $\varepsilon_l = K_L L L_p$, $\delta_\varphi = 2\pi L_p$.
3. Полагается $j = 0, h_\varphi = \delta_\varphi, \varphi_i = 0$.
4. Текущий угол поворота полагается $\varphi = \varphi_j + h_\varphi$.
5. Вычисляются начальные значения сопряженной системы $\psi_1(t_0) = \sin \varphi$, $\psi_2(t_0) = \cos \varphi$.
6. С вычисленными $\psi_1(t_0)$, $\psi_2(t_0)$ интегрируется гамильтонова система

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}, t), x(t_0) = x^0,$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\psi(t) \cdot \partial f(x, \bar{u}, t)}{\partial x},$$
 при интегрировании в каждой точке $t \in [t_0, t_1]$ вычисляется $\bar{u} = \arg \max H(\psi, x, v, t), v \in U$, запоминается точка $s(\varphi) = x(t_1)$.
7. Если $|s_{j-1} - s(\varphi)| < \delta_l - \varepsilon_l$, то шаг увеличивается $h_\varphi = 1,1 h_\varphi$, производится переход на шаг 4.
8. Если $|s_{j-1} - s(\varphi)| < \delta_l - \varepsilon_l$, то шаг уменьшается $h_\varphi = 0,9 h_\varphi$, производится переход на шаг 4.
9. Записываются конечные состояния $s_j = x(t_1)$.

10. Полагается $j = j + 1$, $h_\varphi = \delta_\varphi$, $\varphi_i = \varphi$.

11. Если вся окружность пройдена $\varphi \geq 2\pi$, то переходим на шаг 4.

12. Алгоритм завершен.

Подбор шага h_φ может быть осуществлен по разным правилам, в частности, ускорить процесс можно посредством увеличения шага на случайную величину $h_\varphi = h_\varphi(1 + \xi)$, $\xi \in (0,1)$. Чтобы повысить качество аппроксимации, во-первых, введен дополнительный критерий завершения «подгонки» шага, во-вторых, в случае необходимости, применяется процедура поиска дополнительных точек, основанная на максимизации по внешнему направлению.

Если для конкретной постановки построение границы множества представляется затруднительным, применяются технологии внешних оценок, основанных на несложных геометрических объектах. Предложен подход, который заключается в формировании задач оптимизации по параметрам, глобальное решение которой соответствует аппроксимации в виде эллипсоида, объединения заданного числа эллипсоидов или шаров минимального объема, содержащей все ранее сгенерированные методом стохастической аппроксимации точки. Минимизируемым функционалом является

$$J = V_U + wd,$$

где значение d определяет штраф за нахождение точки из множества стохастической аппроксимации вне каждого из эллипсов, а w — весовой коэффициент. Объем объединения эллипсов V_U вычисляется приближенно. С увеличением числа аппроксимируемых объектов растет количество оптимизируемых параметров, но в большинстве случаев качество аппроксимации, оцениваемое как объем объединения, для числа эллипсоидов более двух растёт существенно медленнее. Оказалось целесообразным при необходимости увеличения числа покрывающих объектов заменить их более простыми (эллипсоиды заменить на шары), что дает возможность получить дополнительный ресурс в количестве этих объектов без повышения вычислительной сложности оптимизационной задачи.

При построении аппроксимации, основанной на объединении шаров, рассматривалось несколько вариантов постановок:

1. задано число шаров n изменяемого, но одинакового для всех радиуса,
2. задан радиус, число шаров оптимизируется,
3. задано l_i ($1 \leq l_i \leq n$, $\sum l_i = n$) шаров радиуса r_i , причем r_i различны и являются изменяемыми в процессе оптимизации параметрами.

В ходе экспериментов установлено, что во многих задачах достаточно использовать шары двух-трех видов общим числом не более двадцати.

Третья глава посвящена вычислительным технологиям и методикам тестирования. Приводятся многометодные вычислительные схемы, которые по результатам проведенных экспериментов показали себя наиболее эффективными, и предложены в качестве стандартных. Описываются методики тестирования, коллекция тестовых задач, результаты и выводы проведенного тестирования.

Согласно предложенной схеме взаимодействия программных компонентов и пользователя, постановка задачи формируется в с-файле, после этого выполняется компиляция всех компонентов в программу, предназначенную для решения

конкретной математической постановки, в то же время многие параметры технологической постановки могут быть изменены в диалоговом режиме в процессе расчетов. Результатом работы полученной программы будет являться набор текстовых файлов с данными о полученных аппроксимациях МД (для большинства методов это набор координат точек, которые образуют облако или контур) и данными о ходе вычислительного процесса. Такой подход предоставляет широкие возможности для варьирования вычислительных схем. Большое число методов, которые в свою очередь имеют настраиваемые параметры, с одной стороны, позволяют процессу вычислений быть гибким и получать адекватные и надежные решения сложных задач, с другой стороны, порождают дополнительные препятствия для быстрого решения простых задач. С целью облегчить взаимодействие пользователя с программой, предложено и протестировано несколько вычислительных схем, названных стандартными. В описании схем указывается прогнозируемая трудность, которая складывается из жесткости и, как следствие, сложности интегрирования системы, сложности геометрии МД и пр., указано примерное время счета для задач из коллекции (расчеты проводились на ПК с процессором Intel Core i7-4500U, 8 ГБ ОЗУ).

Схема 0. Быстрый, в пределах минуты, расчет для получения изображения и предварительных характеристик МД, применим для систем произвольной размерности, преимущественно, не очень сложных:

- а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 2$, $N_{iter} = 5000$.
- б) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5$, $N_{iter} = 5000$.
- в) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 10$, $N_{iter} = 5000$.

Схема 1. Расчет, позволяющий получить внутреннюю и граничную оценки МД системы средней сложности с двумя фазовыми переменными, и занимающий несколько минут.

- а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5$, $N_{iter} = 1000$.
- б) Алгоритм квазиравномерной аппроксимации, использующий гладкую минимизируемую функцию S^1 с параметрами $M = 100$, $d = 0,002\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, где l_1 и l_2 являются размерами объемлющего прямоугольника для МД из а).
- в) Алгоритм монотонной аппроксимации границы $N_s = 100$, $K_L = 1,5$.

Схема 2. Трудоемкая схема применимая только для относительно простых двумерных задач. Вычислительный процесс может занять более 10 минут.

- а) Алгоритм равномерной аппроксимации со вспомогательным оптимизируемым функционалом вида J_1 , $p = 8$. Число точек $N = 100$, $max_time = 500$.
- б) Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы. Число точек $N = 40$.

Схема 3. Получение внешних оценок для сложных задач, решение которых другими методами невозможно. Основным критерием остановки является время, т. е. потребует столько времени, сколько пользователь готов ждать.

- а) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 5$, $N_{iter} = 10000$.
- б) Стохастическая аппроксимация при $k_{tp} = 10$, $N_{iter} = 5000$.
- в) Аппроксимация объединением двух эллипсов.
- г) Аппроксимация объединением 10 шаров трех видов.

Схема 4. Главная цель применения такой схемы – получение надежной аппроксимации границы МД. Применима для двумерных задач.

- а) Стохастическая аппроксимация вычисляется только для наглядной оценки результатов.
- б) Кусочно-линейная аппроксимация границы. Число точек $N = 100$.
- в) Равномерная монотонная аппроксимация границы при $N_s = 200$, $K_L = 1,2$.

Сравнительное тестирование алгоритмов равномерной и квазиравномерной аппроксимации, каждый из которых имеет варианты реализации вспомогательной задачи, заключается в оценке результатов расчетов по нескольким характеристикам:

1. Среднее значение расстояния от точки до ближайшей $\bar{\rho} = \frac{1}{nb} \sum_i \tilde{\rho}_i$, где $\tilde{\rho}_i = \min_j \rho(x^i, x^j)$.
2. Максимальное отклонение от среднего $\rho_{\max} = \max_i |\bar{\rho} - \tilde{\rho}_i|$.
3. Общее отклонение $\Delta\rho = \frac{1}{nb} \sum_i |\bar{\rho} - \tilde{\rho}_i|$.
4. Размеры объемлющего параллелепипеда $l = (x_{j_{\max}}^i - x_{j_{\min}}^i)$.
5. Число решенных задач Коши (n_K).

Вычислительные эксперименты на тестовой коллекции позволяют сделать следующие выводы. Алгоритм КРЗ лучше обеспечивает равномерность и, в большинстве случаев, не уступает алгоритму РЗ в точности поиска граничных точек, но затрачивает значительно меньше вычислительных ресурсов. Максимальную надежность из предложенных вариантов реализаций алгоритмов обеспечивает алгоритм РЗ с применением сглаживания показательной функцией степени 32.

Стресс-тестирование заключалось в определении максимального временного интервала T в задачах аппроксимации МД. В таблице ниже для каждой из тестовых задач приводится максимальное значение t_1 , для которого указанный метод позволил получить хорошую, адекватную аппроксимацию. Результаты приводятся для лучших возможных реализаций подходов и настроек параметров в каждом конкретном случае. В список тестируемых алгоритмов не были включены алгоритмы покрытия эллипсоидами и шарами, т. к. они основываются на результате выполненной стохастической аппроксимации. Таким образом, если стохастическая аппроксимация для некоего t_1 считается приемлемой, то можно будет рассчитать покрытия, для большего же интервала времени в рамках сравнения выводы будут некорректны.

В таблице жирным выделен лучший результат, т. е. максимальное t_1 , для которого в конкретной задаче удалось получить качественное решение; курсивом выделены задачи, в которых рекордное значение t_1 совпало с указанным в тестовой коллекции.

В рамках стресс-тестирования каждый из алгоритмов показал себя более эффективным, чем другие, на некотором подмножестве задач из сформированной тестовой коллекции.

Таблица 1 – Исследование предельных свойств алгоритмов

№	Тестовое время	СА	РЗ	ПМ
01	5	18	15	12
02	2,5	3	3,5	3
03	2	2,5	2,5	2,5
04	1	5	3,5	1
05	2	2	2	2
06	1,5	7	7	7
07	7	7	7	8
08	4	15	10	10
09	2	100	30	5
10	1,3	1,4	1,4	1,4
11	1,6	3	3	3,5
12	1,1	5	4	4
13	2	2	2	2
14	1	2,5	2,5	5
15	2	6	5	4

Четвертая глава посвящена решению прикладных и содержательных задач. Предложен способ поиска глобального экстремума в одной из актуальных проблем в теории экстремальных задач – невыпуклой ЗОУ. Дополнив постановки тестовых задач терминальным функционалом $J(u) = cx(t_1) \rightarrow \min$, можно сформулировать ЗОУ. Предлагаемый метод численного решения ЗОУ основывается на подходе, подобном алгоритму ПМ для задачи аппроксимации МД. Задача поиска глобального экстремума функционала сводится к перебору начальных приближений в начальном фазовом пространстве для сопряженных переменных. Точность решения зависит от алгоритмических параметров и, как правило, оказывается невысокой. Но основной задачей рассматриваемого алгоритма является получение приближения, лежащего в области притяжения глобального экстремума, которое возможно будет уточнить с применением алгоритмов локальной оптимизации.

Схема для решения ЗОУ

0. Задаются начальные значения алгоритмических параметров.

1. Формируется «двойная» задача Коши

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}.$$

2. Определяются начальные значения сопряженных переменных $\psi^0(\varphi)$, зависящие от угла или углов поворота единичного вектора φ .

3. В процессе интегрирования вычисляются управления $u(\varphi)$ и соответствующее значение функционала $J(u(\varphi))$, для конкретного φ .

4. Решается задача $\min J(u(\varphi))$.

Приведем результаты вычислительного эксперимента для тестовой задачи **02**.

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2 \cos x_2 - u^2, \dot{x}_2 = x_1 - 6 \sin x_1 + u$$

$$t \in [0, 2], |u| \leq 1, J(u) = x_1 \rightarrow \min.$$

Решение	Метод	Значение функционала	Координаты точки	
	Основанный на краевой задаче ПМ		x_1	x_2
	Лучшее известное	0,27027	0,27027	2,27093
Количество задач Коши: 9149		Процессорное время: 9 с		

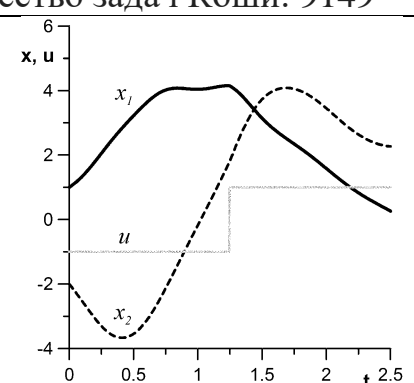


Рисунок 3 – Оптимальные траектории и управление в тестовой задаче 02

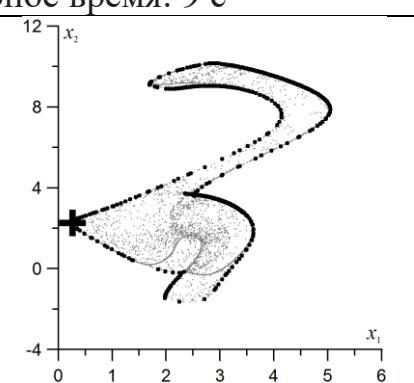


Рисунок 4 – Множество достижимости и экстремум в тестовой задаче 02

Решение задач быстродействия и нормирования воздействий естественным образом связано с исследованием МД и несмотря на то, что оно может быть получено без использования информации о МД, показано, что применение разработанных вычислительных технологий является целесообразным и позволяет получать достоверные результаты.

Проведено исследование *климатическо-экономической DICE модели*², описывающей влияние климатических факторов на промышленность и строительство. Ранее такое исследование проводилось только для упрощенной модели. Построение МД (рис. 5) в различных плоскостях показало, что наилучшая климатическо-экономическая ситуация достигается при полном расходовании ресурсов.

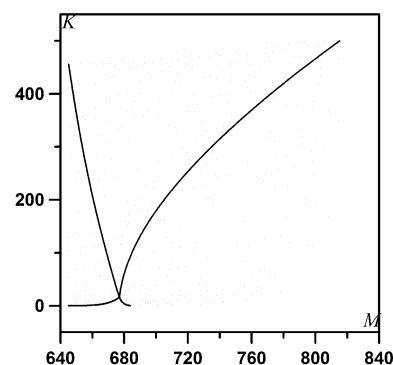


Рисунок 5 – МД и траектории модели DICE для 2020 года

Решение задачи оптимального управления сферическим роботом с тремя роторными двигателями в постановке перевода объекта из точки в точку проводилось в качестве верификации модели. Существенное усложнение постановка получает, если двигателей останется только два. Тогда система становится локально неуправляемой, проявляется физическая сингулярность, и требуются дополнительные настройки в расчетах. Управления, вычисленные для различных конечных точек, физически реализуемы, а траектории соответствуют поведению прототипа робота.

² Nordhaus, W.D., Managing the Global Commons. The Economics of Climate Change, MIT Press, 1994.

С использование реализованных технологий была решена задача оценки области устойчивых решений динамической системы, описывающей реакцию окисления метана на поверхности никеля.

Рассмотрим систему, описывающую реакцию ³.

$$\dot{x}_1 = k_1 P_{CH_4} (1 - S) - k_2 x_1 - k_3 (1 - S) x_1,$$

$$\dot{x}_2 = (k_3 x_1 - k_4 x_2) (1 - S),$$

$$\dot{x}_3 = (k_4 x_2 - k_5 x_3) (1 - S),$$

$$\dot{x}_4 = (k_5 x_3 - k_6 x_4) (1 - S),$$

$$\dot{x}_5 = (k_3 x_1 + k_4 x_2 + k_5 x_3 + k_6 x_4) (1 - S) - 2k_{10} x_5^2 - k_{16} x_5 x_7 - k_{17} x_5 x_8 - k_{18} x_5 x_{10},$$

$$\dot{x}_6 = k_6 x_4 (1 - S) - k_9 x_6 x_7 - k_{12} x_6 x_8,$$

$$\dot{x}_7 = 2k_7 P_{O_2} (1 - S)^2 - 2k_8 x_7^2 - k_9 x_6 x_7 - k_{11} x_7 - k_{14} x_9 x_7 - k_{16} x_5 x_7,$$

$$\dot{x}_8 = k_{11} x_7 - k_{12} x_6 x_8 - k_{15} x_9 x_8 - k_{17} x_5 x_8 - 4k_{19} P_{CH_4} x_8^4,$$

$$\dot{x}_9 = k_9 x_6 x_7 + k_{12} x_6 x_8 - k_{13} x_9 - k_{14} x_9 x_7 - k_{15} x_9 x_8,$$

$$\dot{x}_{10} = k_{16} x_5 x_7 + k_{17} x_5 x_8 - k_{18} x_5 x_{10}.$$

Область определения: $0 \leq x_i \leq 1$, $S = \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 1$, $k_j = k_j^0 \exp\left\{-\frac{E_j}{RT}\right\}$, где R , k_j^0 , E_j заданы и фиксированы, а значение температуры T и P_{CH_4} , P_{O_2} — парциальные давления CH_4 и O_2 заданы допустимыми интервалами: $T \in [800, 1200]$, $P_{CH_4} + P_{O_2} = 329$, $\frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}} \in [1, 30]$. В этой модели имеют место устойчивые периодические решения. Задача выделения области значений таких параметров $\left(T, \frac{P_{CH_4}}{P_{O_2}}\right)$, при которых автоколебания имеют место, была сформулирована в терминах оптимального управления. Решение ЗОУ позволило установить односвязность области значений параметров существования периодических решений, после чего стало возможным построить границу области. На рис. 6 изображена полученная область в плоскости (T, P_{CH_4}) .

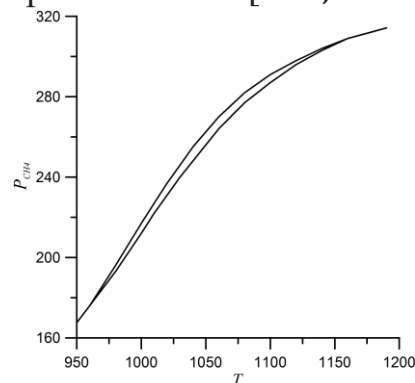


Рисунок 6 – Область значений параметров химической модели

В заключении излагаются основные результаты диссертационной работы.

В приложении приводится тестовая коллекция невыпуклых множеств достижимости.

Основные результаты и выводы

1. Разработаны новые алгоритмы получения внутренних (равномерная и квазиравномерная облачная аппроксимация), граничных (кусочно-линейные аппроксимации, основанные на максимизации площади, принципе максимума

³ Лашина Е. А., Каичев В. В., Чумакова Н. А., Устюгов В. В., Чумаков Г.А., Бухтияров В. И. Математическое моделирование автоколебаний в реакции окисления метана на никеле: изотермическая модель // Кинетика и катализ, 2012, том 53, № 3, с. 389-399.

Понтрягина и свойстве релейности управлений) и внешних (аппроксимация объединением эллипсов или шаров) оценок множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Набор предложенных алгоритмов позволяет в зависимости от заданной цели реализовывать необходимые преимущества, такие как скорость или точность, а сочетание подходов гарантирует надежность результирующей аппроксимации.

2. Разработаны вычислительные технологии аппроксимации множеств достижимости. Эти технологии реализованы в специальном программном обеспечении OPTCON-MD.

3. Сформирована коллекция невыпуклых тестовых множеств для оценки и сравнения вычислительных технологий, отсутствующая ранее в доступной литературе как для задач аппроксимации множеств достижимости, так и для соответствующих задач оптимального управления.

4. Предложены и реализованы подходы решения классов задач оптимального управления и нормирования управляющих воздействий, основанные на разработанных алгоритмах.

5. Решены практические задачи из области химии, экологии и робототехники. Построена область технологических параметров реакции, приводящих к возникновению автоколебательных процессов в реакции окисления метана на никеле. Проведено исследование климатическо-экономической DICE модели в общей постановке. Получены решения задач управления сферическим роботом в постановке перевода объекта из точки в точку.

В диссертационной работе достигнута поставленная цель, сформулированные задачи решены. Основным результатом исследования являются разработанные вычислительные технологии аппроксимации множеств достижимости нелинейных динамических систем, которые позволяют рассматривать задачи широкого класса и превосходят по скорости, точности или степени надежности, известные методы, в зависимости от конкретного случая. Работоспособность вычислительных технологий продемонстрирована на тестовых, а также содержательных и прикладных задачах.

Список основных научных публикаций

В изданиях, рекомендованных ВАК

1. Gornov A. Yu. The Method of Uniform Monotonous Approximation of the Reachable Set Border for a Controllable System / A. Yu. Gornov, T. S. Zarodnyuk, E. A. Finkelstein, A. S. Anikin // Journal of Global Optimization. — 2016. — Vol. 66, Issue 1. — P. 53–64.

2. Финкельштейн Е. А. Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы / Е. А. Финкельштейн, А. Ю. Горнов // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2017. — Т. 19. — С. 217–223.

3. Горнов А. Ю. Численные методы для решения терминальных задач оптимального управления / А. Ю. Горнов, А. И. Тятюшкин, Е. А. Финкельштейн // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 39–52

4. Горнов А. Ю. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости / А. Ю. Горнов, Е. А. Финкельштейн // Автоматика и Телемеханика. — 2015. — № 3. — С. 22–31.

5. Финкельштейн Е. А. Алгоритм аппроксимации множества достижимости нелинейной управляемой системы эллипсоидами оптимального объема / Е. А. Финкельштейн, А. Ю. Горнов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — Т. 39, № 3. — С. 38–43.

6. Горнов А. Ю. Численные методы решения прикладных задач оптимального управления / А. Ю. Горнов, А. И. Тятюшкин, Е. А. Финкельштейн // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 12. — С. 68–82.

В сборниках трудов и тезисов докладов конференций

7. Финкельштейн Е. А. Вычислительная технология аппроксимации множества достижимости нелинейной управляемой системы объединением эллипсов / Е. А. Финкельштейн // Тр. XVIII Байкальской всерос. конф. "Информационные и математические технологии в науке и управлении". Ч. III. — Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2013. — С. 298–301.

8. Горнов А. Ю. Численное исследование модели каталитического окисления СО на платине / А. Ю. Горнов, В. И. Бухтияров, В. В. Каичев, Е. А. Финкельштейн, Е. А. Лашина, Н. А. Чумакова // Тез. докл. III Всерос. конф. «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. — С. 18.

9. Finkelstein E. Reachable set approximation algorithms for smooth and discontinuous systems / E. Finkelstein, A. Gornov // Abstracts of V Intern. Conf. "Optimization and applications" (OPTIMA-2014). — Moscow: DCC RAS, 2014. — P. 69.

10. Finkelstein E. A. Algorithm library in the software package OPTCON-MD for reachable set approximation of a nonlinear system / E. A. Finkelstein, A. Yu. Gornov // Abstracts of Intern. Conf. "System Dynamics and Control Processes". — Ekaterinburg, 2014. — P. 236–237.

11. Горнов А.Ю., Бакланов А.П., Ровенская Е.А., Финкельштейн Е.А., Оберштайнер М. Исследование модели DICE на основе построения множеств достижимости / А. Ю. Горнов, А. П. Бакланов, Е. А. Ровенская, Е. А. Финкельштейн, М. Оберштайнер // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2016. — С. 24.

12. Finkelstein E. Numerical study of the problem of spherical mobile robot optimal control / E. Finkelstein, M. Svinin, A. Gornov // Proc. of VII Intern. Conf. "Optimization and Applications" (OPTIMA-2016). — Moscow: DCC RAS, 2016. — P. 51–52.

13. Finkelstein E. Reachable set approximation method based on Pontryagin's maximum principle / E. Finkelstein, A. Gornov // Abstracts of the Intern. Conf. in memory of Academician Arkady Kryazhinskiy "Systems Analysis: Modeling and Control". — Ekaterinburg, 2016. — P. 48.